 Московский Государственный Университет

им. М. В. Ломоносова

Факультет Вычислительной математики и кибернетики

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Реферат на тему**

**«Вывод закона сохранения импульса из принципа наименьшего действия и однородности пространства. Модели, приводящие к уравнениям эллиптического типа (уравнения Лапласа и Пуассона)»**

Выполнил:

Студент 1 курса магистратуры ВМК МГУ

Родин Иван Сергеевич

511 группа

Москва, 2020 г.

1. **Вывод закона сохранения импульса из принципа наименьшего действия и однородности пространства.**

**Принцип наименьшего действия**

В каждый момент времени, независимых величин , называемых обобщёнными координатами системы, определяют декартовы координаты всех точек и тем самым определяют положение системы. Производные по времени от обобщённых координат носят названия обобщённых скоростей:

Уравнения движения – дифференциальные уравнения второго порядка по отношению к , связывающие ускорения с координатами и скоростями:

С помощью этих соотношений можно по значениям обобщённых координат и скоростей в некоторый момент времени определить значения обобщённых ускорений в этот момент времени. Тогда уравнения движения представимы в виде

Общим принципом получения уравнений движения в такой форме является ***принцип наименьшего действия***, или ***принцип Гамильтона***. Если в моменты времени и механическая система находилась в положении и соответственно, то из всевозможных траекторий, по которым система могла бы прейти из положения в положение , реализуется траектория, доставляющая минимум интегралу

Это интеграл называется действием, а функция под знаком интеграла – ***функцией Лагранжа*** системы.

Принцип выполняется на достаточно малых участках траектории, но на всей траектории этот интеграл может иметь лишь экстремальное значение. Необходимым условием экстремума является обращение в нуль первой вариации:

Тогда

Так как , то

Так как , то

Это равенство должно выполняться при произвольных значениях , а это значит, что

Эта система называется ***уравнениями Лагранжа***.

Для замкнутой системы уравнение Лагранжа принимает следующий вид:

где - радиус-векторы точек системы, .

**Однородность пространства**

***Однородность пространства*** относительно замкнутой механической системы означает неизменность свойств системы при любом её параллельном переносе как целого

где – постоянный вектор сдвига. Это означает, что вид функции Лагранжа не изменится при таком сдвиге, т.е.

Так как не зависит от , то

**Закон сохранения импульса**

Исходя из уравнения Лагранжа для замкнутой системы и однородности пространства, можно получить, что

откуда следует, что

Таким образом, в замкнутой механической системе векторная величина , называемая ***импульсом системы***, остается неизменной при движении.

1. **Модели, приводящие к уравнениям эллиптического типа (уравнения Лапласа и Пуассона).**

**Уравнение Лапласа**

Простейшим уравнением эллиптического типа является ***уравнение Лапласа***, которое для трёх независимых координат имеет вид

или

В случае независимых переменных уравнение Лапласа принимает вид

**Уравнение Пуассона**

Уравнение

или, в случае независимых переменных,

называется ***уравнением Пуассона***.

**Модели, приводящие к уравнениям эллиптического типа**

1. *Задача о стационарном распределении температур в изотропном теле при отсутствии в нём источников и поглотителей тепла.*

Уравнение распространения тепла в изотропном теле в случае отсутствия источников имеет вид

где ­ – точка тела, а – температура тела в этой точке. Пусть в каждой точке внутри тела температура установилась, т.е. Тогда

Таким образом, уравнению Лапласа удовлетворяет температура установившаяся в однородном теле.

Если в теле распределены источники тепла, мощность которых не меняется со временем, то температура удовлетворяет уравнению Пуассона.

1. *Потенциальное движение несжимаемой жидкости.*

Рассмотрим установившееся движение несжимаемой жидкости. Полагаем, что движение жидкости невихревое, т.е. скорость является потенциальным вектором

Для несжимаемой жидкости плотность постоянна, из этого следует, что

Отсюда следует, что

или

Таким образом, потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

В случае наличия распределенных источников и стоков жидкости потенциал скорости удовлетворяет уравнению Пуассона.